

Misspecifikationer i modal-split modeller

Rich J.H.
Danmarks Miljøundersøgelser
Afdelingen for systemanalyse
P.O. Box 358, DK-4000 Roskilde, Danmark
Tlf. +45 46301206 / Fax +45 46301212 / email: jhr@dmu.dk

Abstrakt

Økonometriske modeller for transportadfærd som transportmiddelvalg, bilejerskab, rejseformål, etc. er sædvanligvis baseret på stokastisk nytteteori. Ved at lave forskellige antagelser om den underliggende stokastiske proces fås modeller som spænder fra simple logit modeller til mere generelle probit modeller. Eftersom responsvariablen er diskret er det ikke muligt at teste antagelser vedrørende den underliggende stokastiske proces. Konsekvensen er, at kun relativt lidt information om modellens validitet kan etableres.

I dette paper tages der hul på beskrivelsen af den klasse af misspecifikationer, som skyldes skjulte ikke-lineariteter. Det vises, hvorledes misspecifikationer i modal-split modeller er tæt koblet til rejseafstand og i sidste ende til ændringer i den marginale rejsemodstand. Helt præcist vises det at to respondenter med forskellig marginal rejsemodstand ikke kan antages at have identiske fejllid. Yderligere vises det, hvorledes disse misspecifikationer er systematiske og en oplagt løsningsmåde foreslås.

Keywords: Modal-split modeller, misspecifikationer, ikke-lineariteter / Modal-split models, misspecifications, non-linearities.

Session: Trafikmodeller.

Indledning

Den mest anvendte model for transportmiddelvalg er den ordinære multinomiale logit model (MNL). Udgangspunktet er stokastisk nytteteori hvor der til hver respondent tilordnes en indirekte betinget nyttefunktion. Den fundamentale antagelse er at individets oplevede nytte kan udtrykkes

gennem nyttefunktionen samt at individerne er rationelle forbrugere som søger at maksimere deres nytte. Lad nytten til individ t og alternativ i være givet ved $U_{it} = V_{it} + \mathbf{e}_{it}$. Her repræsenterer V_{it} den deterministiske del af nyttefunktionen mens \mathbf{e}_{it} betegner det stokastiske element. Ved at lave antagelser om den stokastiske proces \mathbf{e}_{it} er det muligt at angive sandsynligheden for at individ t vælger alternativ j som $P_t(j) = P(U_{it} > U_{it'}, \forall j \in M_t)$. Under antagelse af uafhængige identiske gumbel fordelte fejl kan det vises at den tilhørende valgsandsynlighed er givet ved

$$P_t(j) = \frac{e^{V_{t,j}}}{\sum_{m \in M_t} e^{V_{t,m}}}, m \in M_t \forall t \quad (1)$$

hvor M_t definerer den enkelte respondents valgsæt.

Det vanskelige ved at bygge modeller baseret på denne teori er at den endogene variabel er diskret. Vi forsøger med andre ord at anvende en kontinuert teori på diskrete udfald. Da vi ikke kan observere den indirekte nytte er det ikke muligt at teste den latente stokastiske proces på nogen normal måde. Det er imidlertid muligt at påvise hvorvidt misspecifikationer i bestemte situationer vil kunne opstå. Den grundlæggende fremgangsmåde som anvendes i paperet er at indlejre modal-split komponenten i en kombineret diskret-kontinuert ramme, som det blandt andet er gjort i Rich (1996). Ved at udlede marginale fordelinger for den overordnede model er det muligt at identificere misspecifikationer under visse omstændigheder.

Konsekvenser af ikke-lineariteter

Det er relevant at overveje konsekvenserne af en potentiel ikke-linearitet. Lad os først definere hvad der forstås ved en ikke-lineær model. Den lineære model er defineret ved $f(V_{t,m}) = \mathbf{X}_t \beta$.

Som før angiver $V_{t,m}$ nyttefunktionen, mens \mathbf{X}_t og β betegner datamatrice og parametervektor.

Lineær-i-parameter modeller er set ud fra et estimationsteknisk synspunkt identiske med den lineære model. Vi har at $f(V_{t,m}) = g(\mathbf{X}_t \beta)$, mens der for den ikke-lineære model gælder at

$f(V_{t,m}) = g(\mathbf{X}_t \beta)$. Vi skal i det følgende udelukkende beskæftige os med modeller som er lineære i parametrene. I forbindelse med MNL modellen er valgsandsynlighederne den centrale størrelse og disse sandsynligheder er ikke invariant overfor ikke-lineariteter. Der gælder kun at

$$U_m > U_t \forall t \neq m \Leftrightarrow p(m) > p(t) \forall t \neq m \quad (2)$$

Dette gælder oplagt også for enhver monoton transformation af nyttefunktionen¹. Det er klart at potentielle skift i funktionsform vil have indflydelse på modellen og dermed også valgsandsynlighederne, men som hovedregel er MNL modellens estimerede valg relativt robust

¹ Hvis modellen har parametre som varierer over alternativer er dette ikke nødvendigvis tilfældet.

overfor potentielle ikke-lineariteter. Det betyder at, det er meget vanskeligt at få en fornemmelse af, hvordan den korrekte funktionsform ser ud ved kun at se på estimerede valgsandsynligheder. Hvis man på den anden side kun er interesseret i de estimerede valgsandsynligheder er selve funktionsformen oftest mere eller mindre irrelevant.

De store problemer opstår hvis modal-split modellen indgår i et større modelkompleks som det eksempelvis er tilfældet i ALTRANS² og PETRA³. Her vil man oftest forbinde de enkelte submodeller gennem logsummer. Logsummer repræsenterer et tilgængelighedsmål, som udtrykker den enkelte respondents samlede nytte ved et valg. For logsummerne er tilstedeværelsen af ikke-lineariteter mere alvorligt.

$$\log\left(\sum_{m'} e^{X_m}\right) \neq \log\left(\sum_{m'} e^{f(X_m)}\right) \quad (3)$$

En typisk situation, hvor logsummerne er vigtige, er i koblingen mellem bilejerskab og modal-split. Her vil logsummerne fra modal-split delen typisk kunne indgå i bilejerskabet for herved at koble anvendelse med ejerskab.

Tilstedeværelsen af ikke-lineariteter

For at se på hvornår og hvordan ikke-lineariteterne optræder introducerer vi en udvidet modelramme i forhold til MNL modellen. For at forstå ideen bag den nye model kan det være hensigtsmæssigt først at se på en diskret model der kombinerer modal-split og destinationsvalg. I sin simpleste form en helt almindelig flad MNL model som det ses nedenfor i ligning 3.

$$P_t(m, d) = \frac{e^{aS_{t,m}} g_d e^{bC_{t,md}}}{\sum_{m' \in M_t} e^{aS_{t,m'}} \sum_{d' \in M} g_{d'} e^{bC_{t,md'}}} \quad (4)$$

hvor **a** og **b** er parametre hørende til henholdsvis de socioøkonomiske variable $S_{t,m}$ og de variable som relaterer til rejsen $C_{t,md}$. Elementerne i $C_{t,md}$ er typisk tid og pengeomkostninger. Yderligere er g_d en variabel som beskriver attraktionen i destinationen d . Med andre ord ser nyttefunktionen ud som

$$V_{t,md} = aS_{t,m} + bC_{t,md} + q \ln g_d \quad (5)$$

² ALTRANS er et national forskningsprojekt finansieret af Transportrådet, DMU og Miljøstyrelsen. I ALTRANS beskrives befolkningens transportvaner med speciel fokus på serviceniveauet i den kollektive transport. Arbejdet varetages af DMU.

³ PETRA er adfærdsmodel for persontrafikken udviklet af COWI. Se PETRA 1997 working paper no.7.

Den kontinuerte pendant til denne diskrete destinationsmodel opstår ved dels at antage IIA-egenskaben samt at lade zonestørrelsen gå mod 0. Da fremkommer modellen som den infinitesimale grænse. For at få en brugbar model transformeres modellen fra rektangulære til polære koordinater. Det smarte ved denne transformation er, at vi nu umiddelbart kan behandle rejseafstanden endogen⁴. Den nye nyttefunktion får for hver individ formen

$$V_{m,\{L,q\}} = \mathbf{a}\mathbf{S}_m + \mathbf{b}\mathbf{C}_m(L, \mathbf{q}) + q \ln \mathbf{g}_{\{L,q\}} \quad (6)$$

Dette gøres ved at skifte koordinatsystem for hver enkelt respondent således at hvert nye koordinat system netop har centrum hvor respondenteren starter sin rejse. Specifikationen af $C_m(L, \mathbf{q})$ lader vi være givet ved

$$C_m(L, \mathbf{q}) = \left(\frac{C_m(L, \mathbf{q})}{L} \right) L = E_{m,\{L,q\}} L \quad (7)$$

Hvor $E_{m,\{L,q\}}$ eller blot $E_{t,m}$ betegner den marginale rejsemodstand for den enkelte rejse. Det interessante ved denne simple opløsning er at vi ikke antager direkte proportionalitet mellem rejsemodstanden og rejse længden, men netop kan regne igennem med en variabel marginal rejsemodstand.

Modellens valgsandsynligheder er givet ved.

$$\begin{aligned} P_t(m, dLd\mathbf{q}) &= G_t(m, \{L, \mathbf{q}\}) dLd\mathbf{q} \\ &= \frac{e^{\mathbf{a}\mathbf{S}_m} \mathbf{g}(L, \mathbf{q}) e^{\mathbf{b}\mathbf{C}_{t,m}(L, \mathbf{q})} dLd\mathbf{q}}{\sum_{m \in M_t} e^{\mathbf{a}\mathbf{S}_{t,m}} \int_0^B \int_0^p \mathbf{g}(L, \mathbf{q}) e^{\mathbf{b}\mathbf{C}_{t,m}(L, \mathbf{q})} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(L, \mathbf{q})} \right| dLd\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (8)$$

Når $dLd\mathbf{q} \rightarrow 0 \Rightarrow P_t(m, dLd\mathbf{q}) \rightarrow P_t(m, \{L, \mathbf{q}\})$. Fra et beregningsmæssigt synspunkt er selv meget simple funktionsformer for $\mathbf{g}(L, \mathbf{q})$ vanskelige at håndtere. For det første kan integralet ikke evalueres eksakt og for det andet vil integrationsdomænet skifte på en meget kompleks måde. I vores situation er det imidlertid nok at se på det simple tilfælde hvor $\mathbf{g}(L, \mathbf{q}) = \mathbf{g}$.

Maximum likelihood estimatorerne findes på sædvanligvis ved at maksimere likelihoodfunktionen givet ved

$$L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \prod_t \prod_{m \in M_t} G_t(m, \{L, \mathbf{q}\})^{y_{t,m}} \quad (9)$$

⁴ Se Rich H.R. 1996 for en nærmere gennemgang.

Hvor $y_{t,m} = 1 \Leftrightarrow$ alternativ m er valgt og $y_{t,m} = 0$ ellers⁵.

Marginale fordelingsfunktioner

Fra likelihood funktionen er det muligt at udlede to interessante marginale fordelinger. Først og fremmest er den marginale fordeling for transportmiddelvalg defineret ved⁶

$$G_t(m) = \int_0^{b_{\max}} \int_0^{2p} G_t(m, \{L, \mathbf{q}\}) \left| \frac{\eta(x, y)}{\eta(L, \mathbf{q})} \right| d\mathbf{q} dL = \frac{e^{S_{t,m^a}} I_{t,r}(\mathbf{E}_{t,m} \mathbf{b}' | b_{\max})}{\sum_{r \in M_t} e^{S_{t,m^a}} I_{t,r}(\mathbf{E}_{t,m} \mathbf{b}' | b_{\max})} \quad (10)$$

Sandsynligheden af det rumlige valg $\{L, \mathbf{q}\}$ betinget på m er givet ved

$$G_t(\{L, \mathbf{q}\} | m) = \frac{G_t(m, \{L, \mathbf{q}\})}{G_t(m)} \quad (11)$$

Nu kan den marginale rejselængdefordeling umiddelbart udledes ved at integrere \mathbf{q} – dimensionen ud. Vi får at

$$G_t(L | m) = \int_0^{2p} G_t(\{L, \mathbf{q}\} | m) L d\mathbf{q} \quad (12)$$

Hvor det er relativt let at se, at

$$G_t(L | m) = \frac{L e^{(\mathbf{E}_{t,m} L) \mathbf{b}}}{I_{t,m}(\mathbf{E}_{t,m} \mathbf{b})} \quad (13)$$

En interessant størrelse er den forventede rejselængde betinget af transportmåde

$$E[L_{t,m}] = \frac{2}{\mathbf{E}_{t,m} \mathbf{b}} \left(1 - \frac{b_{\max}}{2} G_t(b_{\max}, m) \right) \quad (14)$$

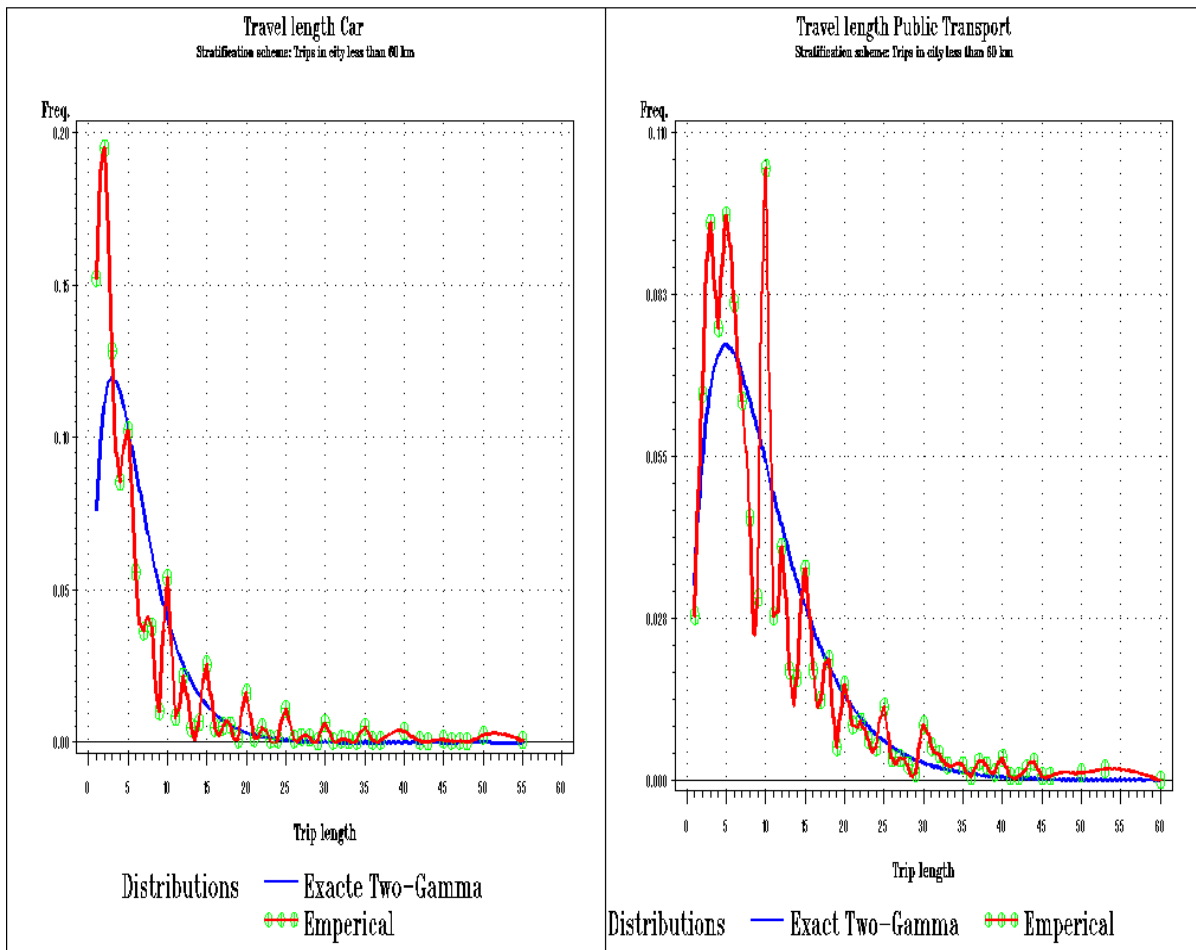
Det helt centrale resultat, som umiddelbart kan udledes fra rejselængdefordelingen er at

$$\lim_{b_{\max} \rightarrow \infty} G_t(L | m) = (\mathbf{E}_{t,m} \mathbf{b})^2 L e^{\mathbf{E}_{t,m} \mathbf{b}} = \Gamma_{t,m}(2, \mathbf{E}_{t,m} \mathbf{b}) \quad (15)$$

⁵ Se appendiks 1 for en opstilling af optimeringsproblemet.

⁶ Formen af $I_{t,r}$ – funktionen kan ses i appendiks 1.

Dette resultat siger at den marginale rejselængdefordeling reducerer til en gammafordeling når b_{\max} går mod uendeligt. I praksis er der oplagt en øvre grænse for b_{\max} og derfor vil den faktiske fordeling være trunkeret. Fra et praktisk synspunkt er der dog ikke grund til at koncentrere sig om den trunkerede del eftersom halerne på gammafordelingen går meget hurtigt mod 0. Selve resultatet er vigtigt at flere grunde. For det første etableres der en simpel forbindelse mellem den teoretiske model og den skitserede gammafunktion. Denne forbindelse kan påvises empirisk udfra TUdata. Se figur 1 for en profil af rejselængdefordelingen⁷.



Figur 1: Empiriske fordelingsfunktion for rejselængden fordelt på to transportmåder.

⁷ Et stort problem ved at sammenligne de to fordelinger er at den empiriske fordeling typisk i tilfælde med survey data er ødelagt af ophobning. Folk svarer typisk 10 kilometer i stedet for 9 og 20 i stedet for 17. Principielt kan man teste fordelingerne ved at gennemføre et person χ^2 – test. Testet overkommer ophobningen men har oplagt lav styrke så det synes mere oplagt blot at se på fordelingerne og konstatere en god overensstemmelse.

En anden ting som bliver klart er, at hvis den marginale rejsemodstand $E_{t,m}$ generelt ændrer sig med L eller t , så kan det ikke antages at alle observationer dækkes af den samme gammafunktion. Med andre ord skrider den fundamentale antagelse om identiske fejled for MNL modellen. Dette resultat har ikke i sig selv den store værdi. Statistikere ved godt at fejled i MNL modeller ikke er identiske. Det interessante opstår først i det omfang, at man kan identificere en systematisk misspecification og det er netop tilfældet her. Lad os tage fat på misspecificationer som varierer med henholdsvis individerne (t) og rejselængden (L).

t - variationer

Hvis variationen i et vist omfang er systematisk over grupper af individer bør man enten overveje en segmentering eller en udvidet parametrisering af rejsemodstanden således at modellen har separate parametre for hver gruppe. Da den marginale rejsemodstand typisk varierer med tilgængelighed vil det oftest være særdeles fornuftigt at segmentere efter urbaniseringsgrad. Dette gøres blandt andet også i ALTRANS.

L - variationer

Variationen hørende til rejselængden er oftest også af systematisk karakter. Lad os antage at den marginale rejsemodstand falder med afstanden L . Dette er et normalt fænomen eftersom længere rejser betyder kørsel på større veje, at man bruger tog fremfor bus etc. Lad T_L være

mængden af rejser af længde L . Da vil $\bar{E}_r(L) = \frac{\sum_{t \in T_L} E_{t,r}}{|T_L|}$ angive den gennemsnitlige marginale

rejsemodstand for transportmåde r og længde L . Bemærk at vi for klarhedens skyld blot antager at der er én alternativ specifik variabel, dvs. at $E_{t,r}$ ikke er en vektor men et tal. I matematisk notation har vi at $\bar{E}_r(1) > \bar{E}_r(2) > \dots > \bar{E}_r(L) > \dots > \bar{E}_r(b_{\max})$.

Eftersom de marginale omkostninger varierer på denne måde er det oplagt, at den underliggende stokastiske proces ikke kan opfylde kravet om identiske fordelinger, jf. ovenstående resultat. På trods af dette er det muligt at der eksisterer en funktion $Q(\cdot)$ således at

$Q(\bar{E}_r(L)) \rightarrow 1 \forall L$. Eftersom $E_{t,r} = \frac{C_{t,m}(L_t)}{L_t}$ søger vi altså en transformation af $C_{t,m}(L_t)$ således

at $Q(C_{t,m}(L_t)) \rightarrow L_t \forall t$. Den interessante ting er altså at den lineære specifikation kun

forekommer som et tilfælde, men at vi i en lang række tilfælde vil kunne håndtere ikke-lineariteten mellem rejsemodstand og rejselængde ved et simpel exogen variabeltransformation som opfylder ovenstående krav.

I de to ovenstående eksempler er det foreslået hvordan man i visse situationer kan mindske effekten af den ikke-linearitet som uværligt vil eksistere i langt de fleste MNL modeller. Forudsætningen er dog at variationen i $\bar{E}_r(L)$ som funktion af L skal være systematisk. Hvis funktionen ikke er monoton faldende har man et forklaringsproblem og man bør overveje data nærmere.

Konklusion

I paperet er det blevet vist hvorledes MNL modeller principielt set indeholder en latent misspecifikation. Denne misspecifikation relaterer sig helt generelt til inhomogene marginale rejsemønstre. Sådanne inhomogeniteter opstår dels i kraft af en variation over individer, som typisk vil skyldes forskellige lokaliseringmæssige forhold og dels en variation relateret til rejselængden. Den første inhomogenitet kan behandles ved at segmentere på urbaniseringsgrad. Den anden inhomogenitet skyldes at man for længere rejser typisk vil køre på større veje, benytte hurtigere transportmidler som eksempelvis tog fremfor bus, etc. I den udstrækning at variationen med rejselængden er systematisk kan man ved at gennemføre en exogen variabeltransformation overkomme problemet. I paperet er opstillet præcist hvilke krav der skal stilles til denne variabeltransformation.

Misspecifikationen skønnes ikke at være problematisk i forhold til modellens evne til at estimere korrekte udfald af den kategoriske endogene variabel. Derimod påpeges det at logsummerne i særlig alvorlig grad vil lide under potentielle misspecifikationer og specielt latente ikke-lineariteter. Da disse logsummer typisk bruges til at koble submodeller i større modelsystemer er problemet alvorligt. Typisk vil den transformation man foretager ikke forbedre modellens fit, men af hensynet til modellens relation til andre submodeller bør man i disse tilfælde undersøge hvordan de skitserede inhomogeniteter spiller ind.

Litteratur

Ben-Akiva M. & Lerman S. 1985, Discrete Choice Analysis, MIT press, Cambridge, Mass.

Manski C. & McFadden D. 1981, Structurel Analysis of Discrete Data, eds. MIT press, Cambridge, Mass.

PETRA working paper no.7 1997, COWI consult.

Rich J.H. 1996, Modelling modal-split and trip length in a simultaneously discrete-continuous setting, I Trafikdage på Aalborg Universitet, supplementsrapport s.75-86.

Appendiks 1

Log likelihood funktionen er givet ved

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \sum_{t'} \sum_{m \in M_t} y_{tm} \log(G_t(m', \{L, \mathbf{q}\})) \\ &= \sum_t \sum_{m \in M_t} y_{tm} \left((\mathbf{S}_{t,m} \mathbf{a}' + (\mathbf{E}_{t,m} L_t) \mathbf{b}') - \log \left(\sum_{r \in M_t} e^{S_{t,r} \mathbf{a}'} I_{t,r}(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' | b_{\max}) \right) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Hvor L_t angiver rejselængde for hver respondent og $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_p\}$ og $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_q\}$. Noter at indekseringen af \mathbf{a} og \mathbf{b} håndteres indirekte gennem datamatricerne \mathbf{S}_t og \mathbf{E}_t . Formen af de to eksogene strukturer under antagelse af 4 forskellige transportmåder er givet ved

$$S_t = \begin{bmatrix} s_{t1} & 0 & 0 & s_{t2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{t1} & 0 & 0 & s_{t2} & 0 \\ 0 & 0 & s_{t1} & 0 & 0 & s_{t2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad E_t = \begin{bmatrix} E_{t,11} & 0 & 0 & 0 & E_{t,21} & 0 \\ 0 & E_{t,12} & 0 & 0 & 0 & E_{t,22} \\ 0 & 0 & E_{t,13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{t,14} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Noter at identifikationsproblemet får den sidste række-vektor i \mathbf{S}_t til at udgå. $\mathbf{E}_{t,m}$ er rækkevektoren defineret som den m' E_t række i hvis vi regner fra t . Denne vektor måler marginal rejsemodstand per enheds distance. $I_{t,r}$ – funktionen kommer fra integrationen over geografien

$$I_{t,r}(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' | b_{\max}) = \int_0^{b_{\max}} \int_0^{2p} L e^{(\mathbf{E}_{t,r} L_t) \mathbf{b}'} d\mathbf{q} dL = 2p \frac{1 + e^{\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' b_{\max}} (b_{\max} \mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' - 1)}{(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}')^2} \quad (17)$$

Så $I_{t,r}$ – funktionen repræsenterer en simpel kontinuert og monoton voksende afbildning $I_{t,r}: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$.

Eftersom der er en naturlig dekomposition af parameterrummet vil vi anvende følgende notation ved definitionen af gradient vektoren.

Lad $\ell = \ell(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ og $\mathbf{G}_1 = \left\{ \frac{\mathcal{J}\ell}{\mathcal{J}a_1}, \dots, \frac{\mathcal{J}\ell}{\mathcal{J}a_k} \right\}$ hvor den j 'te komponent er givet ved

$$\frac{\mathcal{J}\ell}{\mathcal{J}a_j} = \sum_t \sum_{m' \in C_t} y_{t,m'} \left(S_{t,m',j} - \frac{\mathcal{J}\Psi(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\mathcal{J}a_j} \right) \quad (18)$$

Den anden del af gradient vektoren \mathbf{G}_2 er defineret tilsvarende med $\mathbf{G}_2 = \left\{ \frac{\mathcal{J}\ell}{\mathcal{J}b_1}, \dots, \frac{\mathcal{J}\ell}{\mathcal{J}b_k} \right\}$ hvor den j 'te komponent er

$$\frac{\mathcal{J}\ell}{\mathcal{J}b_j} = \sum_t \sum_{m' \in C_t} y_{t,m'} \left(L_t E_{t,m',j} - \frac{\mathcal{J}\Psi(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\mathcal{J}b_j} \right) \quad (19)$$

Den centrale del af gradienten er Ψ – funktionen defineret ved

$$\Psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \log \left(\sum_{m' \in M} e^{S_{t,m'} \mathbf{a}'} I_{t,m'}(\mathbf{E}_{t,m'} \mathbf{b}' | b_{\max}) \right) \quad (20)$$

Herved fås

$$\frac{\mathcal{J}\Psi(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\mathcal{J}a_j} = \frac{\sum_{r \in C_t} e^{S_{t,r} \mathbf{a}'} S_{t,r,j} I(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' | b_{\max})}{\sum_{r \in C_t} e^{S_{t,r} \mathbf{a}'} I(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' | b_{\max})} \quad (21)$$

og

$$\frac{\mathcal{J}\Psi(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\mathcal{J}b_j} = \frac{\sum_{r \in C_t} e^{S_{t,r} \mathbf{a}'} \frac{\mathcal{J}I(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' | b_{\max})}{\mathcal{J}b_j}}{\sum_{r \in C_t} e^{S_{t,r} \mathbf{a}'} I(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' | b_{\max})} \quad (22)$$

hvor $I_{t,r}$ – gradienten er givet ved

$$\frac{\mathcal{I}(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' | b_{\max})}{\mathcal{I}b_i} = 2\mathbf{p} \frac{\left((b_i E_{t,r,i} b_{\max})^2 - 2b_i E_{t,r,i} b_{\max} + 2 \right) e^{b_i E_{t,r,i} b_{\max}} - 2}{b_i^3 E_{t,r,i}^2} \quad (23)$$

Ved substitution af ovenstående udtryk fås et samlet udtryk for gradientvektoren

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}b_j} = \sum_t \sum_{m' \in C_t} y_{t,m'} \left(S_{t,m',j} - \frac{\sum_{r \in C_t} e^{S_{t,r,a'}} S_{t,r,j} I_{t,r}(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' | b_{\max})}{\sum_{r \in C_t} e^{S_{t,r,a'}} I_{t,r}(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' | b_{\max})} \right) \quad (24)$$

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}b_j} = \sum_t \sum_{m' \in C_t} y_{t,m'} \left(L_t E_{t,m',j} - \frac{\sum_{r \in C_t} e^{S_{t,r,a'}} \frac{\mathcal{I}_{t,r}(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' | b_{\max})}{\mathcal{I}b_j}}{\sum_{r \in C_t} e^{S_{t,r,a'}} I_{t,r}(\mathbf{E}_{t,r} \mathbf{b}' | b_{\max})} \right) \quad (25)$$