

Denne artikel er publiceret i det elektroniske tidsskrift  
**Udvalgte Artikler fra Trafikdage på Aalborg Universitet**

(Proceedings from the Annual Transport  
Conference at Aalborg University)

ISSN 1903-1092

[www.trafikdage.dk/artikelarkiv](http://www.trafikdage.dk/artikelarkiv)

T [ åtaget 18.09.2014

Accepteret 19.09.2015

# Sammenhæng mellem hastighed og risiko: Skal potensmodellen erstattes af eksponentialmodellen?

Civilingeniør Katrine Terp Nielsen, [ktnn@cowi.dk](mailto:ktnn@cowi.dk), COWI A/S, Adjunkt Camilla Sloth Andersen, [csa@civil.aau.dk](mailto:csa@civil.aau.dk), Trafikforskningsgruppen Aalborg Universitet

---

## Abstrakt

Potensmodellen har siden sin offentliggørelse i startfirserne været dominerende til estimering af den sikkerhedsmæssige effekt af en hastighedsændring. I 2012 blev en eksponentialmodel publiceret som alternativ til den veletablerede model. Artiklens komparative analyse af de to modeller fokuserer på en evaluering af følgende parametre: statistisk tilpasningsgrad, brugervenlighed og anvendelsesmuligheder. For førstnævnte parameter findes ingen markante forskelle på de to modeller, såfremt potensmodellens eksponent tager højde for vejmiljøet. Brugervenligheden findes for begge modeller høj, men yderligere undersøgelser heraf anbefales. Eksponentialmodellen foranlediger en opsplitting af den totale relative risiko for en hastighedsfordeling. Dette vurderes som en enestående anvendelsesmulighed for modellen. Artiklen anbefaler derfor videre arbejde med eksponentialmodellen, så denne egenskab kan inkorporeres i det praktiske trafikikkerhedsarbejde.

---

## Baggrund

Trafikkens gennemsnitshastighed er en af de faktorer, der har størst indvirkning på trafikikkerheden, både i form af antal uheld og alvorlighedsgraden heraf (Elvik, 2012b). Rejsehastigheden er endvidere afgørende for fremkommeligheden på en given strækning. Denne interesse modsætning nødvendiggør en afvejning, der sikrer et forsvarligt hastighedsniveau under hensyntagen til fremkommeligheden.

En sådan afvejning kræver modelleringsværktøjer. Fokus i denne artikel hviler på et sådant værktøj, der kvantificerer den sikkerhedsmæssige effekt af en hastighedsændring på en given vejstrækning. Potensmodellen har siden startfirserne været dominerende til at beskrive netop dette forhold. Modellen har fået en verdensomspændende udbredelse og ses brugt i et væld af sikkerhedshåndbøger og vejledninger. Som alternativ til den veletablerede model fremsatte den norske trafikforsker Rune Elvik i 2012 en eksponentialmodel. En hidtil uset anvendelsesmulighed foranlediges af eksponentialfunktioners multiplikative egenskaber. Eksponentialmodellen giver nemlig anledning til en multiplikativ risikomodel, der opsplitter den totale risiko på hastighedsniveauer. Vha. dette kan fokus i trafikikkerhedsarbejdet rettes mod de hastighedsniveauer, der bidrager markant til den totale risiko.

Den multiplikative risikomodel er ikke fastlåst til udelukkende at betragte hastighedsfordelingens gennemsnit, hvilket er ganske enestående inden for feltet. Således imødekommes, at to hastighedsfordelinger med samme gennemsnitshastighed kan have helt forskellige risikoprofiler uagtet samme totale relative uheldsrisiko.

Potens- og eksponentialmodellen bliver i denne artikel underlagt en komparativ analyse, der søger at vægte fordele og ulemper mhp. at afgøre hvilken model, der udgør det stærkeste modelleringsredskab. I forbindelse hermed vil modellernes tilpasningsgrad til tilgængeligt data bl.a. blive diskuteret og relateret til det praktiske trafikikkerhedsarbejde.

## Sikkerhedsmæssig effekt af hastighedsændringer

### Hastighed og trafikikkerhed

Trods faste hastighedsgrænser er bilisters hastighed på en strækning ofte ikke identiske. Tilsammen udgør hastighederne derimod en fordeling, der ofte viser sig at være en normalfordeling. I forlængelse heraf har gennemsnitshastigheden på en given vejstrækning primært været brugt som repræsentant for den kollektive hastighedsprofil. Ligeledes er fordelingsens spredning også en vigtig parameter i trafikikkerhedsøjemed. Undersøgelser viser, at en større hastighedsspredning resulterer i en øget risiko for uheld. En pålidelig matematisk sammenhæng er dog ikke bestemt (DGT, 2011).

I denne artikel betragtes den gennemsnitlige kørselshastighed i tilknytning til trafikikkerheden. Forklaringer fra den klassiske mekanik kan begrunde to generelle forventninger om hastighed og trafikikkerhed, nemlig at en stigning i gennemsnitshastigheden vil betyde flere uheld og flere tilskadekomne/dræbte, og at et uheld ved en given hastighed vil have større konsekvenser end ved en lavere hastighed. Risikoen for at selve uheldet indtræffer, er i høj grad hægtet op på bilistens muligheder for at reagere og undvige, hvis en kritisk situation opstår. Reaktions- og bremselængde er to fysiske sammenhænge, der er essentielle herfor, og begge øges i takt med hastigheden. I et uheldsøjeblik giver den kvadrerede kollisionshastighed ophav til en kinetisk energimængde, som er altafgørende for konsekvenserne for de implicerede i uheldet. Det betyder, at jo højere udgangshastigheden har været des højere vil kollisionshastigheden være og des mere kinetisk energi vil der blive udløst i kollisionsojeblikket.

### Potensmodellen

Med disse fysiske sammenhænge relateret til uheldsrisiko og hastighed in mente, vendes opmærksomheden nu mod prædiktionen af et ændret uheldsantal på baggrund af ændret gennemsnitshastighed. Målet er altså at kvantificere følgende forhold:

$$\frac{\#U_{\text{efter}}}{\#U_{\text{før}}} = g(v_{\text{før}}, v_{\text{efter}}) \quad [1]$$

Venstre side af formlen angiver det relative forhold mellem antal uheld i henholdsvis efter- og førperioden og er derfor enhedsløs. Højre side udtrykker målet med modelleringen nemlig at bestemme funktionen  $g$ , der afhænger af den gennemsnitlige hastighed på strækningen før ændring i gennemsnitshastigheden ( $v_{\text{før}}$ ) og efter ændringen af gennemsnitshastigheden ( $v_{\text{efter}}$ ).

Et sådant forholdstal mellem henholdsvis uheld i en før- og efterperiode betegnes med forkortelsen AMF, *Accident Modification Factor*, og angiver altså effekten af det hastighedsregulerende tiltag (Olsen, 2013).

Formeludtrykket for  $g$  forudsætter, at hastighedsændringens indflydelse på uheldstallet ansues separat og dermed, at der kontrolleres for øvrige faktorer med betydning for trafikikkerheden.

## Empirisk og teoretisk baggrund

En af de første modelleringer af forholdet i formel [1] blev gjort af den svenske trafikforsker Göran Nilsson i 1981. Her fremsatte han sin berømte *potensmodel*, der efterfølgende er gået hen at danne noget nær praksis på området (DGT, 2011).

Modellen blev formuleret med baggrund i data fra en række nyindførte eller ændrede hastighedsgrænser i Sverige i slutningen af 1960'erne og starten af 1970'erne. I første omgang blev sammenhængen modelleret for henholdsvis døds- og personskadeuheld (Cameron & Elvik, 2010).

Skønt Nilsson er kendt for sin potensmodel, dækker hans teorier reelt ikke over en enkelt model men en mindre række af formeludtryk, hvis udformning har sin primære inspiration fra kørselshastighedens relationer til henholdsvis kinetisk energi og bremselængde. Begge forhold relaterer sig til hastigheden i anden potens.

## Matematisk udformning

Nilssons potensmodeller kan opdeles i to grupper. Disse to grupperinger dækker over henholdsvis modeller for antal trafikuheld (betegnet  $Y$ ) og modeller for antal tilskadekomne (betegnet  $Z$ ), hvor begge grupper er underopdelt på alvorlighedsgrad. I boksen herunder er anført parvis sammenhørende ligninger for potensmodellen for tre inddelinger af personskadeuheld.

Potensmodellen er i denne boks præsenteret som i Nilssons doktorafhandling fra 2004. Ligningerne er angivet to og to svarende til antal uheld og antal tilskadekomne for hver inddeling af alvorlighedsgrad.

Indekseringen 'før' angiver værdierne observeret før et skifte i gennemsnitshastigheden fra  $v_{\text{før}}$  til  $v_{\text{efter}}$ , mens indekset 'efter' angiver de registrerede værdier efter skiftet. Tidsrummene som før- og eftermålingerne er opgjort i er lige store.

For antal personskadeuheld (alle):

$$Y_{\text{efter}} = Y_{\text{før}} \left( \frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}} \right)^2 \quad [2]$$

For antal tilskadekomne og dræbte (alle):

$$Z_{\text{efter}} = Y_{\text{før}} \left( \frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}} \right)^2 + (Z_{\text{før}} - Y_{\text{før}}) \left( \frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}} \right)^4 \quad [3]$$

For antal alvorlige uheld og dødsuheld:

$$Y_{\text{efter}} = Y_{\text{før}} \left( \frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}} \right)^3 \quad [4]$$

For antal alvorligt tilskadekomne og antal trafikdræbte:

$$Z_{\text{efter}} = Y_{\text{før}} \left( \frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}} \right)^3 + (Z_{\text{før}} - Y_{\text{før}}) \left( \frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}} \right)^6 \quad [5]$$

For antal dødsuheld:

$$Y_{\text{efter}} = Y_{\text{før}} \left( \frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}} \right)^4 \quad [6]$$

For antal trafikdræbte:

$$Z_{\text{efter}} = Y_{\text{før}} \left( \frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}} \right)^4 + (Z_{\text{før}} - Y_{\text{før}}) \left( \frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}} \right)^8 \quad [7]$$

Hver af Nilssons formler for antallet af trafikuheld, Y-udtrykkene, angiver den efterspurgte funktion  $g$  (se formel [1]) som en simpel monoton potensfunktion. Potensmodellens generelle udtryk for antallet af uheld har derfor følgende form:

$$\frac{\#U_{\text{efter}}}{\#U_{\text{før}}} = \left( \frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}} \right)^{\delta} \quad [8]$$

Forskellen på funktionsudtrykkene beror således udelukkende i værdien af eksponenten,  $\delta$ . Heri hviler meget af den enkelthed og elegance modellen er kendt for. Formlerne [2], [4] og [6] bærer også en stor generalitet, idet de eksempelvis ikke forudsætter stedspecifikke karakteristika.

Formel [8] giver grundlag for en italesættelse af potensmodellens betydning. Potensmodellen foreskriver, at en procentuel ned- eller opgang i gennemsnitshastigheden vil bevirke en forventelig procentuel ændring af antallet af uheld. Desto højere numerisk værdi af eksponenten, des større procentuel ændring af antal uheld for en given hastighedsændring vil forventes.

I forbindelse med den direkte betydning af potensmodellen bør det også noteres, at denne ikke tager højde for størrelsen af initialgennemsnitshastigheden, således vil en halvering af gennemsnitshastigheden have samme betydning på en bygade som på en motorvej, mere herom senere.

I forbindelse med valideringer af modellen er potensværdier fremkommet gældende for henholdsvis by- og landområder og endvidere for materielskadeuheld (Elvik, 2009).

Boksens tre relationer for antallet af tilskadekomne og trafikdræbte, Z-udtrykkene, er knap så simple som Y-udtrykkene. De tre formler, [3], [5] og [7], fremkommer analogt ved udledning under antagelse af deres parvist tilhørende Y-udtryk. Pladsen her tillader dog ikke en detaljeret udledning, men den kan se skitseret i Nilssons rapport fra 2004.

Z-udtrykkene har ligesom Y-udtrykkene også en karakteristisk udformning. Første led i hver af ligningerne [3], [5] og [7] er identiske med det tilhørende Y-udtryk.

Forskellen ligger i det andet led, som er uden betydning, hvis antallet af tilskadekomne pr. uheld er 1 i før-perioden. I denne situation vil antallet af uheld og antallet af ofre nemlig være ens og  $(Z_{\text{før}} - Y_{\text{før}})$  dermed nul. Et sådant forhold mellem antal ofre og antal uheld er dog sjældent (Nilsson, 2004).

Trods disse tre to-lede teoretiske udtryk for potensmodellen relateret til antal tilskadekomne har modelleringer senere vist, at bedste statistiske tilpasning for prædiktionen af antal tilskadekomne faktisk fås ved at benytte samme udtryk som for antal uheld, se formel [8]. Potensmodellen er derfor kendt under dette formeludtryk.

## Validering af potensmodellen

En matematisk model er en simplificering af virkeligheden og kræver derfor løbende valideringer efter bedst tilgængeligt data for at bevare troværdighed. Potensmodellen er ingen undtagelse herfor, og den er derfor blevet revideret gentagende gange.

Særligt den norske trafikforsker Rune Elvik har ad flere omgange evalueret potensmodellen. Han foretog i 2009 en større undersøgelse, som byggede på 115 undersøgelser.

Undersøgelsen fra 2009 angav generelt lavere værdier for eksponenterne end Nilssons egne, hvorfor Elvik konkluderede, at det kunne tyde på, at der over tid sker en mindre afmatning af hastighedsændringers effekt på sikkerheden. En anden interessant konklusion Elvik gør sig er, at potensmodellen ikke er fastlåst rent geografisk, den kan bruges i alle lande (Elvik, 2009). Dette er med til at understrege, den elegance modellen rummer - modellen er universal.

Modellens svaghed mht. denne og øvrige valideringer ligger hovedsageligt i modelleringen af forholdene i byområder, hvilket bl.a. skyldes en stærkt begrænset datamængde, da få studier af en ændret hastighed er lavet for byområder (Nilsson, 2004). Elvik og Cameron konkluderer i et studie fra 2010, at potensmodellen

passer tilfredsstillende for både motorveje og landeveje, mens de pointerer, at modellen ikke synes at være direkte brugbar i byområder.

## Verdensomspændende anvendelse

Potensmodellen har gennem årene vundet bredt internationalt indpas i trafikikkerhedsarbejdet. Denne udbredelse udtrykkes ved at flere store internationale organisationer og lande benytter sig af modellen, her kan bl.a. nævnes OECD-landene, Verdenssundhedsorganisationen (WHO) og The European Road Safety Observatory (DGT, 2010). Potensmodellen findes derfor flittigt citeret og særligt brugt i forbindelse med udgivelser omhandlende strategisk planlægning og speed-management i Europa (Cameron & Elvik, 2010). Potensmodellen udgør et effektvurderingsværktøj på makroskopisk niveau, og dens anvendelse ligger derfor i forlængelse heraf. Det er ud fra modellen muligt at estimere en hastighedsændrings indflydelse på hver enkel kategori af uheld og hver enkelt kategori af tilskadekomne og/eller trafikdræbte. Herefter kan potensmodellens output på enkelvis konverteres til samfundsøkonomi vha. enhedsomkostninger for uheldstyperne. Således kan modellen danne grundlag for en prioritering af ønskede trafikikkerhedsforbedrende tiltag ud fra en cost-benefit-analyse.

## Ekspontialmodellen

Potensmodellens konstruktion medfører som nævnt, at samme procentvise udvikling i gennemsnitshastigheden vil bevirke samme AMF-værdi uagtet hastighedsniveauet. Eksempelvis betyder dette, at et fald i gennemsnitshastigheden fra 100km/t til 75km/t vil foranledige samme relative fald i antal alvorlige uheld som en sænkning af gennemsnitshastigheden fra 20km/t til 15km/t. Denne effekt af modellen virker ikke helt intuitiv. Som konsekvens heraf har man for potensmodellen estimeret en større mængde af eksponentværdier, der er gældende for forskellige typer uheld på henholdsvis motor-/landeveje og bolig-/byveje. Herved er afhængigheden af *initialhastigheden* (gennemsnitshastigheden inden en hastighedsændrende foranstaltning implementeres) forsøgt imødekommet (Elvik, 2012a). Som en yderligere følge af dette kontraintuitive forhold påbegyndte to amerikanske forskere i 2005 en søgen efter en alternativ model til modellering af relationen i formel [1]. Deres arbejde byggede på samme datamængde som Elvik også brugte i en undersøgelse fra 2004 og resulterede i en upubliceret udgivelse, hvori en kompliceret eksponentialmodel angives som potentiel afløser for potensmodellen (Hauer & Bonneson, 2006). De to forskeres arbejde er på flere punkter kritiseret af Elvik, som bl.a. har påtalt deres kassering af data fra boligområder, samt at megen af deres modellering hviler på enkelte datapunkter med stor usikkerhed (Elvik, 2012a). Dog fandt Elvik det interessant at fortsætte deres arbejde og bestræbe sig på at opstille et mere simpelt formeludtryk for eksponentialmodellen (Elvik, 2012a). I det følgende vil resultatet af hans arbejde blive belyst.

## Elviks eksponentialmodel

Datamængden til grundlag for Elviks modellering stammer fra hans projekt fra 2009 vedrørende en validering af potensmodellen, hvortil 526 estimater af potensmodellens eksponenter var bestemt (Elvik, 2012a).

Den anvendte modelleringsmetode bygger på en aggregationsteknik. Metoden vil kun kort blive skitseret her, mens de tekniske detaljer kan ses forklaret i Elviks to udgivelser fra 2012, se Elvik (2012a) og (2012b). Den overordnede idé med metoden er at konstruere uheldstal, der relativt knyttes til hastigheden, således at højeste initialhastighed svarer til et relativt uheldstal på 100. Denne værdi nedskrives successivt ved at betragte på hinanden følgende fald i initialhastigheden på 10km/t. Hver nedskrivning udføres vha. potensmodellen, formel [8]. Den anvendte  $\delta$ -værdi er et vægтет estimat af eksponentværdier svarende til andelen af de 526 estimater, som har initialhastigheder inden for et 10km/t-interval omkredsende initialhastigheden for det konstruerede hastighedsfald (Elvik, 2012a).

Herved fås parvis sammenhørende data for relative uheldstal og kørselshastigheder. I et statistikprogram udføres herpå regression med henholdsvis en potens- og eksponentialfunktion. Resultaterne af denne sammenlignende statistiske analyse vil blive nærstuderet senere i denne artikel (Elvik, 2012a).

Teknikken lod sig kun gennemføre for modelleringen af tre uheldstyper, nemlig døds-, personskade- og materielskadeuheld. For hver af disse tre typer blev der estimeret eksponentialfunktioner af formen:

$$F(v) = \alpha e^{\beta v} \quad [9]$$

Dette formeludtryk angiver det relative antal uheld ved en gennemsnitshastighed på  $v$  [m/s], hvor  $e$  er Eulers tal og  $\alpha$  og  $\beta$  regressionskonstanter hørende til en af de tre uheldstyper. Ved en ændring af gennemsnitshastigheden fra  $v_{\text{før}}$  til  $v_{\text{efter}}$  giver formel [9] ophav til følgende udtryk for den dertilhørende uheldsændring:

$$\frac{\#U_{\text{efter}}}{\#U_{\text{før}}} = \frac{F(v_{\text{efter}})}{F(v_{\text{før}})} = \frac{\alpha e^{\beta v_{\text{efter}}}}{\alpha e^{\beta v_{\text{før}}}} = e^{\beta(v_{\text{efter}} - v_{\text{før}})} \quad [10]$$

Dette er Elviks eksponentialmodel, der ligesom potensmodellen kvantificerer formel [1]. Det er værd at bemærke, at højre side kan skrives som  $(e^{\beta})^{(v_{\text{efter}} - v_{\text{før}})}$ . Da  $e^{\beta}$  blot er en konstant for den pågældende uheldstype, ses det af formel [10], at AMF-værdien kun afhænger af en enkelt konstant og gennemsnitshastigheden før og efter en hastighedsændrende foranstaltning. Dette er også gældende for potensmodellen. Udtrykket for eksponentialmodellen rummer derfor også meget simplicitet.

Hvor potensmodellen ser på det relative forhold mellem en før- og efterhastighed, benytter eksponentialmodellen sig af den absolutte forskel på disse værdier. Derfor vil den samme nominelle hastighedsændring, eksempelvis et fald på 5km/t, ifølge eksponentialmodellen give samme fald i antal uheld uanset hastighedsniveau. Eksponentialmodellen er derfor ikke direkte afhængig af initialhastigheden på trods af, det bl.a. var ønsket herom, der katalyserede en søgen efter et alternativ til potensmodellen.

Den indirekte afhængighed af initialhastigheden findes ved at evaluere væksthastigheden for hhv. en potens- og en eksponentialfunktion. Til dette formål kan begge differentialkvotienter og værdier heraf sammenlignes. Dette vil give samme resultat som at betragte Figur 1. Af figuren ses det, at eksponentialfunktionen vokser markant hurtigere end potensmodellen, særligt tydeligt ved høje initialhastigheder. For Elviks uheldsmodel betyder det konkret, at en procentvis reduktion af gennemsnitshastigheden vil have større indflydelse på uheldstallet, desto højere initialhastigheden er. Grundet denne store væksthastighed vil eksponentialmodellen prognosticere væsentligt større ændringer i uheldsrisikoen ved høje initialhastigheder end potensmodellen. Herved tager modellen indirekte højde for det kontraintuitive forhold, som Hauer og Bonneson ligeledes forsøgte at eliminere (Elvik, 2012a).

## Multiplikative risikobidrag

Eksponentialfunktioner rummer megen matematisk elegance, som viser sig nyttig i trafiksikkerhedsarbejdet. Dette er illustreret i en artikel forfattet af Sverre Olsen fra 2013, se Olsen (2013). Olsen betragter i artiklen en relativ risiko givet i forhold til en fast referencehastighed, eksempelvis en hastighedsgrænse på 80km/t, som ønskes overholdt på en strækning. Kører alle 80km/t er den totale relative risiko 1, det samme hvis gennemsnitshastigheden på anden vis er 80km/t. Det interessante ved Olsens arbejde er, at Elviks eksponentialmodel giver anledning til at opsplitte denne totale relative risiko i risikobidrag svarende til forskellige hastighedsniveauer. Dette vil i trafiksikkerhedsarbejdet konkret betyde, at hastighedsgrupper, der bidrager markant til den totale relative risiko, kan spottes, og foranstaltninger kan rettes herimod.

Denne faktorisering af den totale relative risiko bygger på eksponentialfunktioners multiplikative egenskaber, nemlig:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad [11]$$

I boksen på næste side bliver den totale relative risiko i forhold til en hastighedsgrænse på 80km/t faktoriseret for en stikprøve af hastigheder fra N antal køretøjer. Udledningen foregår analogt for en anden hastighedsgrænse. Olsen beskriver også en konvertering af resultaterne til et kontinuert tilfælde, hvor hastighederne er kendt for hvert enkelt køretøj (Olsen, 2013).

Faktoriseringen af den totale relative risiko nedenfor er foretaget med udgangspunkt i Olsens artikel fra 2013. Indledningsvist fremføres lidt notation:

$N$  = det totale antal køretøjer i stikprøven.

$M$  = antal intervaller for køretøjernes hastigheder.

$n_j$  = antal køretøjer i  $j$ 'te interval, hvor  $1 \leq j \leq M$ .

$\bar{x}_j$  = gennemsnitshastigheden i det  $j$ 'te interval, hvor  $1 \leq j \leq M$ .

$\bar{X}$  = gennemsnitshastigheden for hele stikprøven.

Bruges formel [10], fås den totale relative risiko i forhold til 80km/t til:

$$\text{Total relativ risiko} = e^{\beta(\bar{X}-80)} \quad [12]$$

Dette omskrives vha. en indsættelse af et udtryk for stikprøvens gennemsnit, nemlig:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M (n_j \bar{x}_j) \quad [13]$$

Ved indsættelse i [15] fås:

$$\text{Total relativ risiko} = e^{\beta(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^M (n_j \bar{x}_j) - 80)} = e^{\beta(\sum_{j=1}^M (\frac{1}{N} n_j \bar{x}_j) - 1 \cdot 80)} \quad [14]$$

Det sidste ettal bemærkes at kunne skrives som:  $1 = \frac{\sum_{j=1}^M n_j}{N}$ , dette indsættes i [14]:

$$\text{Total relativ risiko} = e^{\beta(\sum_{j=1}^M \frac{n_j \bar{x}_j}{N} - \sum_{j=1}^M \frac{n_j \cdot 80}{N})} = e^{\beta(\sum_{j=1}^M \frac{n_j}{N} (\bar{x}_j - 80))} \quad [15]$$

Som ved hjælp af eksponentialfunktionens multiplikative egenskab, [11], omskrives til:

$$\text{Total relativ risiko} = \prod_{j=1}^M e^{\beta(\bar{x}_j - 80) \frac{n_j}{N}} = \prod_{j=1}^M (e^{\beta(\bar{x}_j - 80)})^{\frac{n_j}{N}} \quad [16]$$

Hvor sidste omskrivning bygger på endnu en egenskab ved eksponentialfunktioner, nemlig  $e^{a \cdot b} = (e^a)^b$

Udtrykket i formel [16] angiver netop den søgte relation, idet den totale relative risiko på højre side faktoriseres i risikobidrag for hvert interval af hastigheder. For hver værdi af  $j$  bestemmes en relativ risiko svarende til formel [10]. Denne værdi vægtes herefter ved at opløfte værdien i  $\frac{n_j}{N}$ , som udtrykker andelen af køretøjer i det pågældende interval - et forhold der er ekspliciteret nedenfor:

$$\text{Total relative risiko} = R_1^{\frac{n_1}{N}} \cdot R_2^{\frac{n_2}{N}} \dots R_M^{\frac{n_M}{N}} \quad [17]$$

Således giver eksponentialmodellen altså ophav til en multiplikativ model for risikobidrag.

## Anvendelsesmuligheder

Elviks arbejde med den nye forsimplede eksponentialmodel er af nyere dato, hvorfor der ved dette projekts afslutning alene foreligger få eksponentværdier for modellen, værdier af  $\beta$  i formel [10]. Disse værdier forefindes på nuværende tidspunkt kun for uheldstyper, hvor aggregationsteknikken lod sig fuldføre, altså for antal dødsuheld, antal personskadeuheld og antal materielskadeuheld. Elvik har i forlængelse af sin artikel fra 2012 udviklet  $\beta$ -værdier gældende for uheld med henholdsvis lettere og alvorligt tilskadekomne

(Olsen, 2013). Disse værdier er pr. 2013 ikke offentliggjort, men blev det i 2014 efter afslutning af dette projekt (Elvik, 2014). Dette betyder, at eksponentialmodellen fremadrettet giver mulighed for at modellere både på uheds- og på personskadeniveau, hvorfor eksponentialmodellen altså foranlediger samme muligheder for cost-benefit-analyser som potensmodellen.

Som beskrevet i ovenstående er en meget væsentlig fordel ved modellen, at den samlede relative risiko i forhold til en fast referencehastighed kan faktoriseres i risikobidrag for forskellige hastighedsniveauer. Dette lægger op til anvendelser, der rækker ud over potensmodellens. Først og fremmest giver det bedre muligheder for at rette hastighedsregulerende tiltag mod dem, der primært bidrager til den totale risiko. Denne målretning af trafikikkerhedsmæssige tiltag er ganske unik. Det norske Vegdirektorat, som også har stået for udviklingen af metoden til opdeling af risikobidrag, er af denne grund ved at inkorporere eksponentialmodellen i deres praksis for udpegning af veje til SATK (Strækings Automatisk Trafik Kontrol) (Olsen, 2013). Da to hastighedsfordelinger med samme gennemsnitsværdi kan være meget forskellige, må denne opsplitning af risikobidrag på hastighedsniveauer opfattes som et meget stærkt redskab.

## Diskussion

I det foregående er forholdet mellem en hastighedsændring og ændringen i antal uheld/tilskadekomne blevet belyst. To matematiske modeller er beskrevet i primære termer af teoretisk baggrund, matematisk struktur og anvendelsesmuligheder. I det næste vil modellernes fordele og ulemper blive gransket i en komparativ analyse i et forsøg på at afgøre hvilken model, der udgør det stærkeste værktøj i det praktiske trafikikkerhedsarbejde.

## Statistisk tilpasningsgrad

Et væsentligt parameter at sammenligne potens- og eksponentialmodellen på er deres evne til at fitte sammenhørende data for hastighed og trafikikkerhed.

Potensmodellens tilpasning til empirisk data fra byområder er ad flere omgange konstateret ufuldkommen, senest af Cameron og Elvik i 2010. Få studier af hastighedsændringer er foretaget i byområder, hvorfor datagrundlaget for tilpasning er sparsom, hvilket dermed også er gældende for regression med en eksponentialfunktion. Manglen på data kan også bunde i en generelt lavere rapporteringsgrad for mindre alvorlige uheld, der som oftest vil indtræffe ved lave hastigheder som i et byområde.

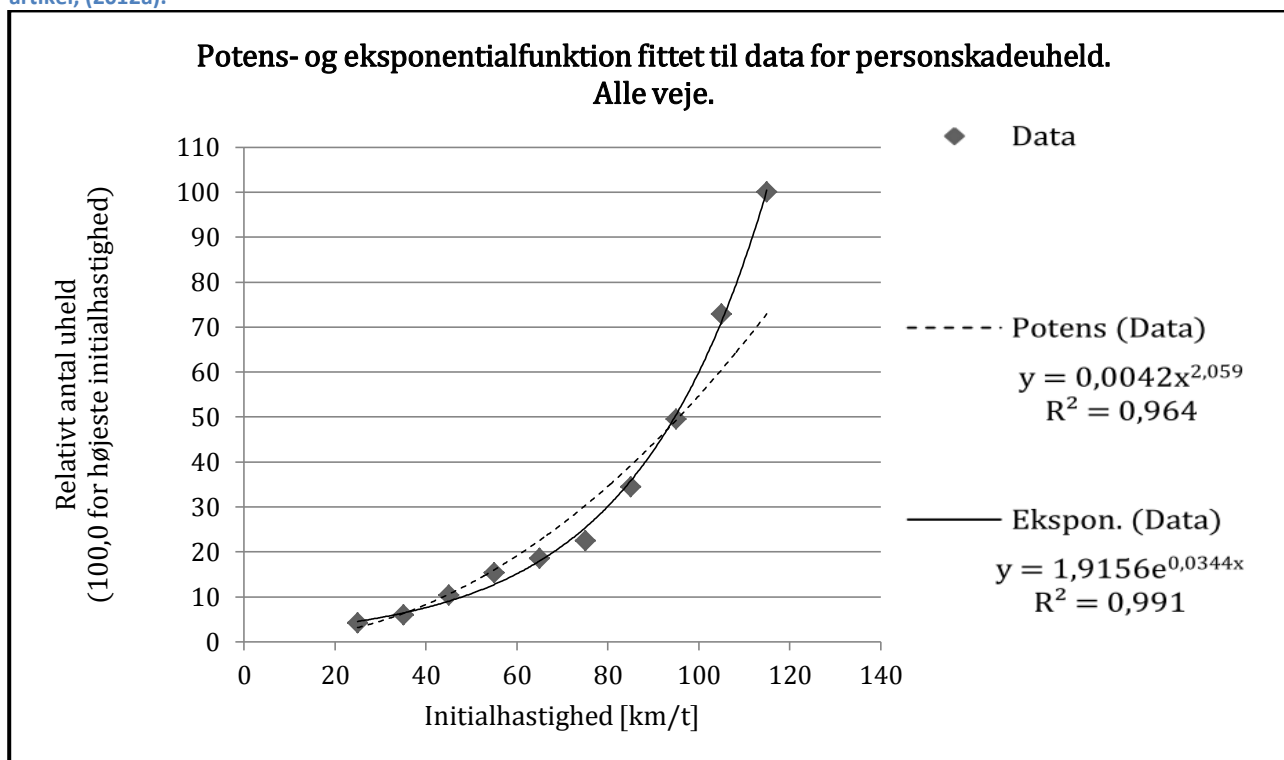
**Tabel 1: Korrelationskoefficienter for potens- og eksponentialmodellen (Elvik, 2012a). Værdier i parentes stammer fra undertegnede egne modelleringer af samme data i programmet Excel 2010.**

Type af data	Vægtning af data	R <sup>2</sup> for potensmodellen	R <sup>2</sup> for eksponentialmodellen
Personskadeuheld	Uvægtet	0,982 (0,964)	0,996 (0,991)
	Vægtet	0,986	0,994
Dødsuheld	Uvægtet	0,981	0,985
	Vægtet	0,987	0,981
Materielskadeuheld	Uvægtet	0,989	0,987
	Vægtet	0,989	0,992

Elviks eksponentialmodel fra 2012 er som skildret fremkommet på baggrund af en aggregationsteknik og derpå følgende regression. Figur 1 viser resultatet heraf for personskadeuheld for samtlige initialhastigheder. Datapunkterne i figuren er ikke vægtet indbyrdes. I Tabel 1 ses samtlige korrelationskoefficienter for de modellerede uheldstyper. Som det fremgår af tabellen giver vægtet data samme resultat for personskadeuheld, nemlig en meget høj korrelationskoefficient for eksponentialfunktionen og en værdi, der er smule lavere for potensmodellen. Af de tre uheldstyper ses de største forskelle på tilpasningsgraden netop for dataene for personskadeuheld, hvor eksponentialmodellen giver en korrelationskoefficient på  $R_{\text{eksp.}}^2 = 0,996$  og potensmodellen på  $R_{\text{potens}}^2 = 0,982$  (Elvik, 2012a).



Figur 1: Potens- og eksponentialfunktionen tilpasset data for personskadeuheld. Egen graf lavet på baggrund af data fra Elviks artikel, (2012a).



Resultaterne er mindre tydelige for døds- og materielskadeuheld, her er værdierne for vægtet og uvægtet data modsatrettede, jævnfør tabellen. Vægtningen af data søger netop at tillægge resultatet større statistisk sikkerhed, hvorfor også Elvik bygger sine konklusioner på korrelationskoefficienterne for vægtet data. Det betyder jævnfør Tabel 1, at potensmodellen passer marginalt bedre til dødsuheldsdataene ( $R_{\text{eksp.}}^2=0,981$  og  $R_{\text{potens}}^2=0,987$ ), mens det omvendte er gældende for materielskadeuheld ( $R_{\text{eksp.}}^2=0,992$  og  $R_{\text{potens}}^2=0,989$ ). Det er værd at bemærke, at samtlige korrelationskoefficienter i tabellen er meget høje. Elvik forsøger i sin artikel at afdække i hvilket omfang, dette kan skyldes aggregationsteknikken. Han minimerer derfor aggregationsintervallerne til 5km/t og får igen høje korrelationskoefficienter, hvorfor resultaterne konkluderes robuste over for teknikken (Elvik, 2012a).

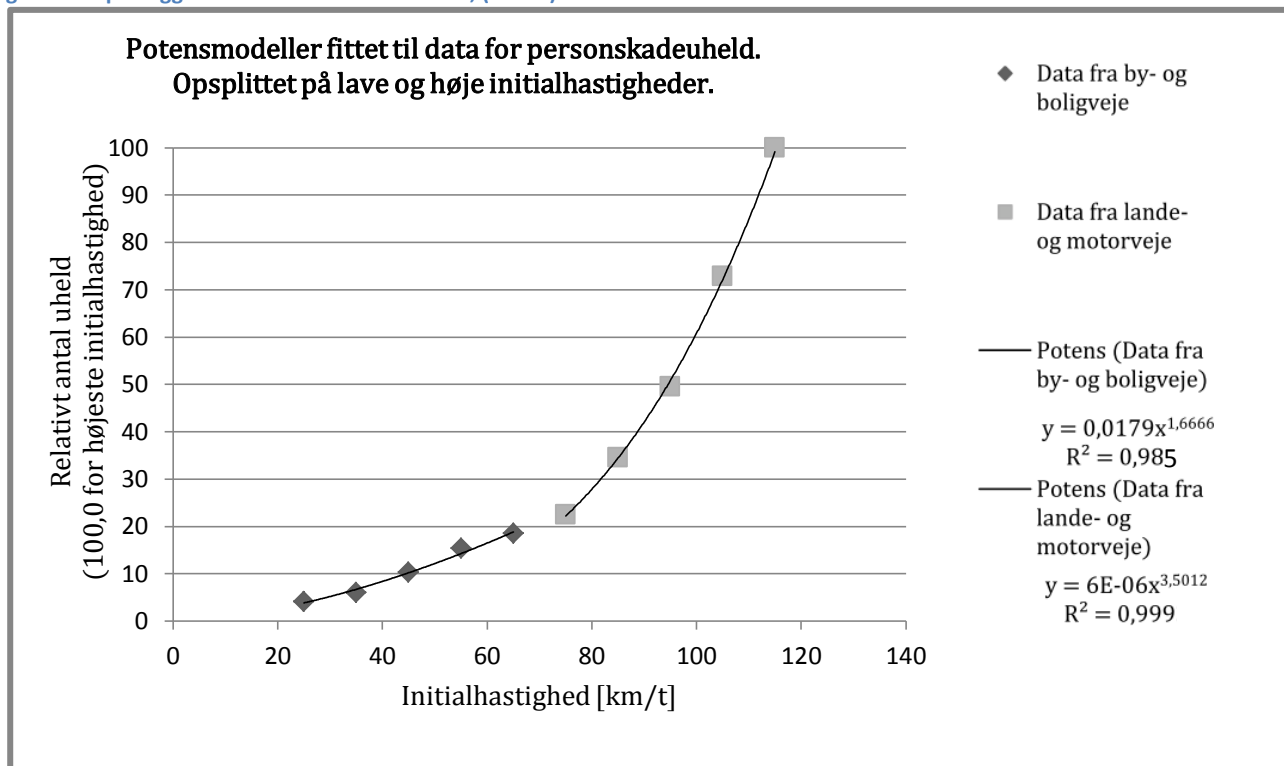
I Elviks artikel udføres en enkelt regression for potensmodellen for hver uheldstype. Herved skal en enkelt eksponentværdi dække hele spændet af initialhastigheder. Da der for potensmodellen netop er udviklet forskellige eksponentværdier for henholdsvis by-/boligveje og lande-/motorveje til at imødekomme afhængigheden af hastighedsniveauet, synes dette at være en grov forsimpning, der ved en sammenligning alene vil tale til fordel for eksponentialmodellen. Ved dette opnås nemlig en eksponent for potensmodellen, der hverken fitter godt for lave eller høje initialhastigheder, hvilket både ses af Figur 1 og af korrelationskoefficienterne.

For at imødekomme dette forhold fremstilles der til denne artikel derfor egne modelleringer i programmet Excel 2010 for personskadeuheldsdataene på baggrund af Elviks aggregerede data for hastigheder svarende til by- og landmiljøer.

For modelleringen af samtlige initialhastigheder under ét fås på uforklarlig vis ikke samme korrelationskoefficienter som Elviks trods samme værdier af konstanter og eksponenter. Forholdet mellem korrelationskoefficienterne fra samme analyse er dog ens de to undersøgelser i mellem. Korrelationskoefficienter for henholdsvis by- og landområder vil derfor kun blive sammenholdt med de opnåede koefficienter fra Excel 2010, som ses af Figur 1.

Dataene for personskadeuheldene opsplittes i to mængder svarende til initialhastigheder under og over 70km/t, i et forsøg på at repræsentere henholdsvis urbane og rurale hastigheder. Ideelt set var aggregationsteknikken udført selvstændigt for andelen af de 526 undersøgelser indsamlet i henholdsvis byområder og i åbent land. Resultaterne af undertegnede undersøgelse ses af Figur 2.

Figur 2: To potensfunktioner tilpasset data for personskadeuheld opsplittet på initialhastigheder under og over 70km/t. Egen graf lavet på baggrund af data fra Elviks artikel, (2012a).



Særligt potensfunktionen for lande- og motorveje tilpasser dataene utroligt godt med en korrelationskoefficient på  $R_{\text{pot.,land}}^2=0,999$ . Tilpasningen til data svarende til hastigheder i et bymiljø gøres også med en høj korrelationskoefficient på  $R_{\text{pot.,by}}^2= 0,985$ . Begge regressioner giver en bedre tilpasning end, når en enkelt potensfunktion fittes til hele spekteret af initialhastigheder, her fås kun  $R_{\text{potens}}^2= 0,965$ , se Figur 1. Elviks konklusion, om at eksponentialfunktionen fitter data for personskadeuheld bedre, synes derfor ikke så stærk, hvis potensmodellens afhængighed af hastighedsniveauet ydes lidt retfærdighed.

Trafiksikkerhedsarbejdet er en praktisk disciplin, hvorfor det findes interessant at belyse, hvilken betydning en lidt højere korrelationskoefficient for eksponentialmodellen har i praksis, hvor situationen både anskues som i Figur 1 og 2. I det følgende betragtes derfor et eksempel, hvor gennemsnitshastigheden falder med 10% på henholdsvis en lande- og byvej. Resultaterne af eksemplet ses i Tabel 2.

Tabel 2: AMF-værdier for personskadeuheld beregnet ud fra eksponential- og potensfunktionerne vist i Figur 1 og 2 samt formel [8] og [10].

Initialhastighed [km/t] og finalhastighed [km/t]	AMF-eksponential (alle veje) = $e^{0,0344(v_{\text{efter}} - v_{\text{før}})}$	AMF-potens (alle veje) = $\left(\frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}}\right)^{2,059}$	AMF-potens (by-/boligveje) = $\left(\frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}}\right)^{1,667}$	AMF-potens (lande-/motorveje) = $\left(\frac{v_{\text{efter}}}{v_{\text{før}}}\right)^{3,501}$
90 falder til 81	0,73	0,81	-	0,69
55 falder til 49,5	0,83	0,81	0,84	-

For begge hastighedsændringer giver resultaterne samme billede. Forskellen mellem AMF-værdierne for eksponentialmodellen og potensmodellen er størst, når potensmodellens eksponent *ikke* afhænger af vejmiljøet. Sammenlignes resultaterne dog i relation til vejens omgivelser giver de to modeller dog værdier meget tættere på hinanden. Eksponentialmodellen giver en lidt mindre reduktion af uheldstallet end potensmodellen for hastighedsændringen på landevejen, mens modellen giver en lidt større reduktion af uheldstallet for byvejen end potensmodellen. De forventelige reduktioner af uheldstallene er derfor meget ens for begge modeller, når der tages højde for vejmiljøet.

Retteligt bør det dog påpeges, at regressionerne for de to funktionsudtryk i Figur 2 kun bygger på respektivt fem datapunkter, hvorfor resultaterne for korrelationskoefficienterne og resultaterne i Tabel 2 skal ses i lyset heraf. Elvik fik i sin analyse omtrent samme resultater ved en doubling af antal datapunkter, og af denne grund forventes det, at forholdet mellem korrelationskoefficienterne i Figur 2 signalerer, hvad der ville være opnået ved en større datamængde.

I Elviks artikel giver eksponentialmodellen bedre regression for primært personskadeuheld, men til dels også for materielskadeuheld. Som eksemplificeret ovenfor kan den bedre regression for personskadeuheld opvejes ved en sondring mellem eksponenter for potensmodellen. Af denne grund kan en bedre regression for eksponentialmodellen ikke stå som hovedargument for et skifte af model i trafiksikkerhedsarbejdet.

## Brugervenlighed

En høj brugervenlighed er vigtig for linket mellem teori og praksis og skal bl.a. garantere for korrekt anvendelse. Potensmodellen blev fremsat for over 30 år siden, hvorfor fortroligheden med modellen generelt må antages at være stor, hvilket også styrkes af dens høje grad af simplicitet.

Kompleksiteten af eksponentialmodellen som vist i formel [10] synes ikke umiddelbart større end potensmodellens, da det modellerede forhold også alene baserer sig på en enkelt uskiftelig parameter, nemlig værdien af  $e^{\beta}$ . For eksponentialmodellen er værdien af denne parameter gældende uanset vejmiljø; værdien afhænger kun af uheldstype, hvilket jo ikke er gældende for potensmodellen. Eksponentialmodellen indeholder derfor en stor alsidighed grundet denne uafhængighed af hastighedsniveau, hvilket må bidrage til en høj brugervenlighed.

Eksponentialmodellen giver som skildret en unik mulighed for at opsplitte den totale risiko for en hastighedsfordeling på risikobidrag på hastighedsintervaller. Formel [16] udtrykker dette forhold, og kompleksiteten heraf kan synes større. En undersøgelse af brugervenligheden af de to modeller kunne derfor være nyttig. Grundet stor fortrolighed og måske deraf foranlediget forudindtagethed blandt praktikere synes det oplagt at inddrage ingeniørstuderende i en sådan undersøgelse.

Selvom resultatet af en sådan brugervenlighedsundersøgelse ikke viser uoverkommelige indvendinger mod eksponentialmodellen, må det formodes, at en implementeringsperiode for modellen vil være af længere varighed. Foruden udbredt fortrolighed blandt praktikere med potensmodellen skyldes dette også, at potensmodellen er blevet en integreret del af analyser, vejledninger og sikkerhedshåndbøger globalt. En succesfuld implementering af en ny model vil især ske gennem nationale sektormyndigheder som Vejdirektoratet i Danmark. Undervisningsmaterialer vil desuden behøve opdateringer, således at mulighederne i eksponentialmodellen på sigt kan annekteres i det brede trafiksikkerhedsarbejde.

## Anvendelsesmuligheder

En sidste vigtig parameter at sammenligne de to modeller på er deres anvendelighed. Begge modeller udgør et sikkerhedsvurderingsværktøj i forbindelse med en hastighedsændring; årsagen til et skifte i hastighedsniveauet er modellerne underordnet. Modellerne er derfor oplagte til cost-benefit-analyser i forbindelse med prioriteringer af trafiksikkerhedsmæssige tiltag. På denne front adskiller de to modeller sig alene ved, at potensmodellen i 2013 rummer flere muligheder for modelleringer end eksponentialmodellen. Elvik offentliggjorde i 2014 flere  $\beta$ -værdier, således det nu er muligt at modellere på samme detaljeringniveau som med potensmodellen (Elvik, 2014).

Den multiplikative risikomodel, som udspringer af eksponentialmodellen, er et meget brugbart redskab. Herved lader de trafikikkerhedsmæssige vurderinger sig nemlig ikke begrænse til at basere sig på gennemsnitshastigheden. Dette gør det muligt at rette hastighedsreducerende tiltag mod de primære bidragere til den totale risiko. Dette er en klar anvendelsesmæssig fordel, som det norske Vegdirektorat drager nytte af i deres SATK-projekt. Eksponentialmodellen giver derfor en meget enestående anvendelse, som vil være et spild ikke at udnytte.

## Afrunding

Potensmodellen og eksponentialmodellen er i denne artikel studeret gennem en komparativ analyse, der havde til mål at vægte fordele og ulemper ved modellerne. Parametrene for sammenligningen var statistisk tilpasningsgrad, brugervenlighed samt anvendelsesmuligheder.

For førstnævnte parameter fandtes ingen markante forskelle på de to modeller. Den matematiske regression var tilnærmelsesvis ligeså god for potens- og eksponentialmodellen, såfremt potensmodellens eksponent afhang af vejmiljø. I tilknytning hertil må det dog igen nævnes, at antallet af datapunkter for både by- og landområder til undertegnede egne analyser ønskeligt havde været højere.

Analysen af brugervenligheden lod sig primært bygge på egne betragtninger af den matematiske kompleksitet eller det modsatte heraf. For begge modeller gælder, at blot et enkelt parameter afgør, hvilken uheldstype AMF-værdien modelleres for. Brugervenligheden synes derfor høj, men en nærmere analyse heraf forekommer interessant, således at eventuelle forhindringer for korrekt brug af eksponentialmodellen kan elimineres. Grundet den mangeårige anvendelse af potensmodellen kan en sådan analyse foruden praktikere have ingeniørstuderende som deltagere for at begrænse graden af forudindtagethed.

Det springende punkt i den sammenlignende analyse er anvendelsesmulighederne. Eksponentialmodellen rummer i 2013 færre muligheder for modelleringer end potensmodellen. Efter at Elvik (2014) fremlagde flere  $\beta$ -værdier i 2014 er denne forskel dog udlignet. Eksponentialmodellen medfører en hidtil uset anvendelse, nemlig opsplitningen af den totale relative risiko. Hertil betragtes andet end gennemsnitshastigheden, hvilket betyder, at fokus i trafikikkerhedsarbejdet kan rettes mod hastighedsklasser, der bidrager betragteligt til den totale relative risiko. Således understøttes en effektiv indsats for at begrænse antallet af uheld.

Opsplitningen på risikobidrag og dermed inddragelsen af andre hastigheder end gennemsnitshastigheden i effektanalyser udgør en markant kvalitet ved eksponentialmodellen, som vil være et tab ikke at udnytte. Denne artikel anbefaler derfor yderligere forskning, der kan bringe eksponentialmodellens modelleringsmuligheder på højde med potensmodellen.

## Referencer

- Cameron, M. H.; Elvik, R. (2010): Nilsson's Power Model connecting speed and road trauma: Applicability by road type and alternative models for urban roads. I: *Accident Analysis and Prevention*, 42, s. 1908-1915.
- Dirección General de Tráfico (DGT) (2011): Current state of knowledge on the relationship between speed and road safety. Evolution of traffic speeds in Spain. I: *In depth*, 26.
- Elvik, R.; Christensen, P.; Amundsen, A. (2004): Speed and road accidents – An evaluation of the Power Model. TØI Rapport 740. Institute of Transport Economics, Oslo.
- Elvik, R. (2009): The Power Model of the relationship between speed and road safety. Update and new analyses. TØI Rapport 1034. Institute of Transport Economics, Oslo.
- Elvik, R. (2012a): A re-parameterization of the Power Model of the relationship between the speed of traffic and the number of accidents and accident victims. I: *Accident Analysis and Prevention*, 50, s. 854-860.
- Elvik, R. (2012b): Fartgrenser. På <http://tsh.toi.no/doc660.htm> (Downloadet 11. oktober 2013). Institute of Transport Economics, Oslo.

- Elvik, R. (2014): Fart og trafikksikkerhet – nye modeller, TØI rapport 1296, Transportøkonomisk institutt, Oslo
- Hauer, E.; Bonneson J. (2006): An empirical examination of the relationship between speed and road accidents based on data by Elvik, Christensen and Amundsen. Upubliceret manuskript fra 5. maj 2006, forberedt til the Highway Safety Manual Task Force.
- Hauer, E. (2009): Speed and Safety. I: *Transportation Research Record*, 2103, s. 10-17.
- Nilsson, G. (2004): Traffic Safety Dimensions and the Power Model to Describe the Effect of Speed on Safety. Lund Institute of Technology, Lund.
- Olsen, S. F. (2013): Ny metode for beregning av effekten av fartsreducerende tiltak – eksempel SATK. I: *Artikler fra Trafikdage på Aalborg Universitet*.